

2022.5.11

日本原子力研究開発機構 大洗研究所
高速実験炉部

即発臨界超過からプラグ間隙を通したナトリウム漏洩に至る事象の 簡易評価に関する検討

0. はじめに

「常陽」の ULOF 事象での①即発臨界超過による熱エネルギー発生から、②炉心物質の膨張と UCS (炉心上部構造) を通した流出、③上部プレナム下部での FCI と CDA 気泡の成長による機械的エネルギー発生、④カバーガスの圧縮による圧力上昇、⑤遮へいプラグの間隙を通したナトリウム漏洩、までの一連の現象を簡易的な手法で解析し、SIMMER などの解析コードによる解析結果の妥当性を確認することに関する検討を行った。

基本的には①から⑤までの現象について各段階での簡易評価を行うことで、これに対応する SIMMER による解析結果の妥当性を確認する方針とした。これは解析コードを用いた評価における基本方針、即ち ULOF 事象のような BDBA については、最確評価を基本として不確かさが大きい (かつ影響の大きい) 現象の不確かさの影響評価を行うものの、不確かさの重ね合わせは行わないとの方針を、簡易的な手法についても適用すべきと考えるためである。特に、簡易モデルを用いた解析ではその保守性を担保するために、解析コードによる解析よりも大きな不確かさを想定する必要がある、①から⑤の一連の現象について、その前の現象の簡易解析の結果を受け継ぐ方法で解析を実施すると、大きな不確かさを重ね合わせることになることに留意する必要がある。

1. ①即発臨界超過による熱エネルギー発生

炉心物質のスロッシング挙動モデルから評価される反応度挿入率を用いて、一点炉動特性近似モデルと炉心物質の組成の空間分布等を考慮した各種の反応度フィードバック挙動によって発生エネルギーを評価し、SIMMER コードによる発生エネルギーの妥当性を確認するとの方針が適切と考えられる。この場合は、簡易モデルで考慮可能な反応度フィードバック機構と物理状況を考慮した上で、簡易モデルによる解析結果と解析コードによる結果解析を比較検討し、解析コードによる結果の妥当性を議論することとなる。

2. ②炉心物質の膨張と UCS を通した流出、および③上部プレナム下部での FCI による機械的エネルギー発生

ここでは、SIMMER による即発臨界超過による出力逸走の解析で発生した熱エネルギー

が最も大きなケースである、不確かさ影響評価ケース 2 の炉心状態に基づいて簡易モデルによる解析を行い、SIMMER によって解析された機械的エネルギーの妥当性を確認する。②の時間スケールはおおよそ数 10ms であり、その初期の数 ms の時間スケールでは、炉心内での温度分布及び燃料蒸気圧分布による炉心内の圧力勾配による炉心内の急速な攪拌、均温化、熔融燃料から熔融スチールへの伝熱が生じる。ここでは簡易モデルということで、温度や物質の分布を考慮せず炉心と UCS を一点で近似する。炉心を高温の炉心物質（燃料とスチール）がある体積割合で均一に混合した領域、UCS は圧損を与えてそこを通過する物質から伝熱を受ける一点のノードとして扱い、上部プレナムに流出する炉心物質の質量と温度を求める。

まず、実際の SIMMER-IV 解析における炉心の状態変化を調査した結果を第 1 図～第 5 図に示す。これらのグラフは SIMMER-IV による PDE 解析結果の炉心内状態の平均物理量を求める後処理ツール (BFCAL) の結果をまとめた表とグラフである。第 1 図の平均蒸気圧力は各成分の蒸気圧力の炉心平均値 (1:燃料、2:スチール、3:ナトリウム、4:FP ガス) で、全圧力は単相圧力を除いたこれらの圧力値の合計値の空間平均である。これに対して、第 4 図の平均液体燃料・スチール温度から求めた飽和圧力は明らかに低く、PDE 過程の初期数 10ms の間は炉心物質には温度分布が存在し、その局所的な蒸気圧が炉心全体の圧力に影響を与えていることがわかる。このことは第 1 図の蒸気圧に対する各物質の飽和温度 (第 5 図) が第 2 図の平均温度に比べておおよそ 1000K ほど高く推移することからも確認できる。しかしながら、これらの空間分布の効果は簡易モデルでは扱えないため、燃料やスチールの質量・温度はそれぞれ一点で代表するモデルとする必要があり、これらの情報を参考にして、機械的エネルギーの解析を行う炉心の初期状態を設定する。

UCS を流出する炉心物質の流速を Lockhart-Martinelli パラメータを用いた二相圧損¹を用いて求め、これが UCS を通過する際の熱損失を計算して流出する炉心物質の量とそれが持つ熱エネルギーを求めた。炉心物質から UCS への伝熱は、燃料は Dittus-Boelter 相関式、スチールは Seban-Shimazaki の相関式を用いる。この簡易解析は EXCEL 上で必要とされる物理諸量と相関式を記述することで実施した。この EXCEL シートを添付 1 に示す。

SIMMER-IV による PDE 解析の結果 (第 6 図) から、機械的エネルギーは約 10ms～約 50ms の約 40ms の間に上部プレナム底面 (燃料集合体出口近傍) で発生する FCI 圧力による CDA 気泡の成長によって生じると考えられる。このため、今回の簡易解析では UCS 内を炉心物質が通過して上部プレナム底部に達し、そこからさらに 40ms の間に UCS から上部プレナムに流出する炉心物質の量と熱エネルギーを FCI に寄与出来る炉心物質の量および熱エネルギーとして求めることとする。なお、SIMMER 解析で 50ms の時点では

¹ 機械工学大系 11 気液二相流、赤川浩爾、1973

CDA 気泡体積の初期値からの変化は約 1.5m^3 、上部プレナムに流出する炉心物質の質量は燃料とスチールそれぞれ約 300kg 、体積にして約 0.09m^3 であり、CDA 気泡は炉心物質の体積の約 16 倍まで成長しており、これ以後に流出する炉心物質は CDA 気泡を成長させる FCI に大きく寄与できないと想定することは適切と考えられる。

駆動圧力を SIMMER 計算値の炉心圧力の平均値の初期値である 6.609MPa とすると、流出量は燃料が約 308kg 、スチールが約 97.4kg 、これらの物質が持つ熱エネルギーの和は約 791MJ となった。FCI の変換効率は多くの実験で 1% をかなり下回ることが示されている²とされるが、ここでは PDE の体系に近い、ナトリウムプールの底面から高温物質を噴出させた THINA 試験³における変換効率約 0.3% を用いると、発生する機械的エネルギーは約 2.3MJ となる。

3. ④カバーガスの圧縮による圧力上昇

この現象については、カバーガスのポリトロップ圧縮挙動と上部プレナム内のナトリウムスラグの運動方程式、および気泡を 1 次元としてモデル化した Slug モデル、あるいは半球形の気泡として Rayleigh-Plesset 方程式を連立するモデルを作成した。簡易モデルの基礎式を添付 2 に、有限距離の Rayleigh-Plesset 方程式の導出を添付 3 に示す。これらの基礎式を Runge-Kutta 法で数値積分することでナトリウムスラグの運動、カバーガスの圧縮挙動を求めた。

圧力源としては、カバーガス体積 7.3m^3 で 1 気圧となるポリトロップ変化を想定し、かつ圧力が燃料とナトリウムの接触境界面温度から定まる飽和蒸気圧約 2MPa を超える体積以下では圧力を 2MPa に維持するようにした。スラグモデル及び Rayleigh モデルについて、ポリトロップ指数 n を $n=1.01, 1.4, 1.66$ として解析を行った結果を第 7 図から第 10 図に示す。第 7 図と第 8 図はスラグモデルによる機械的エネルギー（ナトリウムの運動エネルギーとカバーガス圧縮エネルギーの和）とカバーガス圧力の時間変化、第 9 図と第 10 図は Rayleigh モデルによる機械的エネルギーとカバーガス圧力の時間変化である。なお、両モデルともに圧力源の PdV を数値的に積分した仕事量と解析的に求めた機械的エネルギーが一致していることから、モデルは適切に作成されていると考えられる。解析結果を表 1 に示す。

² 秋山守、溶融燃料と冷却材の熱的相互作用、日本原子力学会誌、p.3-8, Vol.20, No.6, 1978

³ Huber, F., et al, "Experiments to the Behaviour of Thermite Melt Injected into a Sodium Pool," Proc. Int. Fast Reactor Safety Meeting, Vol.II, p.407-416, 1990.

表1 カバーガス圧縮簡易モデル解析結果

ポリトロープ指数	スラグモデル		Rayleigh モデル	
	機械的エネルギー最大値(MJ)	カバーガス圧力ピーク値(MPa)	機械的エネルギー最大値(MJ)	カバーガス圧力ピーク値(MPa)
1.01	2.9	5.3	2.9	5.3
1.4	4.1	6.3	4.1	6.3
1.66	4.9	7.0	4.9	6.9

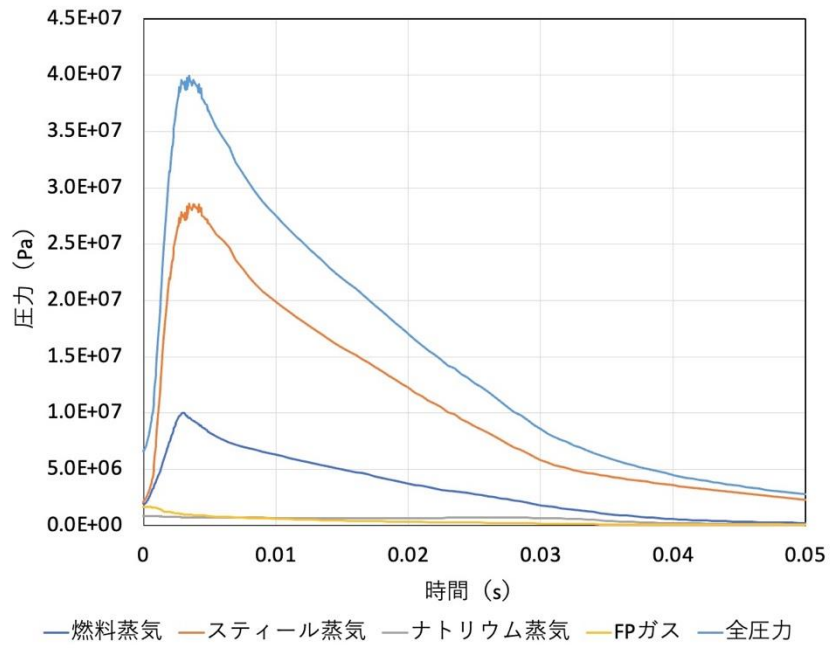
両モデルで機械的エネルギーの最大値、カバーガス圧力のピーク値はほぼ一致している。ただし、これらの値が最大値をとるのはスラグモデルでは約 60ms~80ms、Rayleigh モデルで約 30ms~50ms の間であり、Rayleigh モデルのほうが気泡の成長と収縮のサイクルを早く評価する。カバーガス圧力のピーク値はポリトロープ指数を下げると同様に低下する傾向となっているが、これは圧力源部も非凝縮性ガスのポリトロープ変化を想定しているためであると考えられる。各ケースで圧力源部の PV 関係をポリトロープ指数に依存しないように固定すれば、ポリトロープ指数の低下とともにカバーガス圧力のピーク値は上昇すると考えられる。表1に示すように、発生する機械的エネルギーは高々約 5MJ 以下であるが、ここで大きな機械的エネルギーが発生するように n=1.4 の Rayleigh モデルにおいて圧力源の圧力の上限を 2MPa から増加させるパラメータ解析を実施した。その場合のカバーガス圧力のピーク値を表2に、カバーガス圧力の時間変化を図11に示す。

表2 Rayleigh モデル (n=1.4) による機械的エネルギーとカバーガスピーク圧力の関係

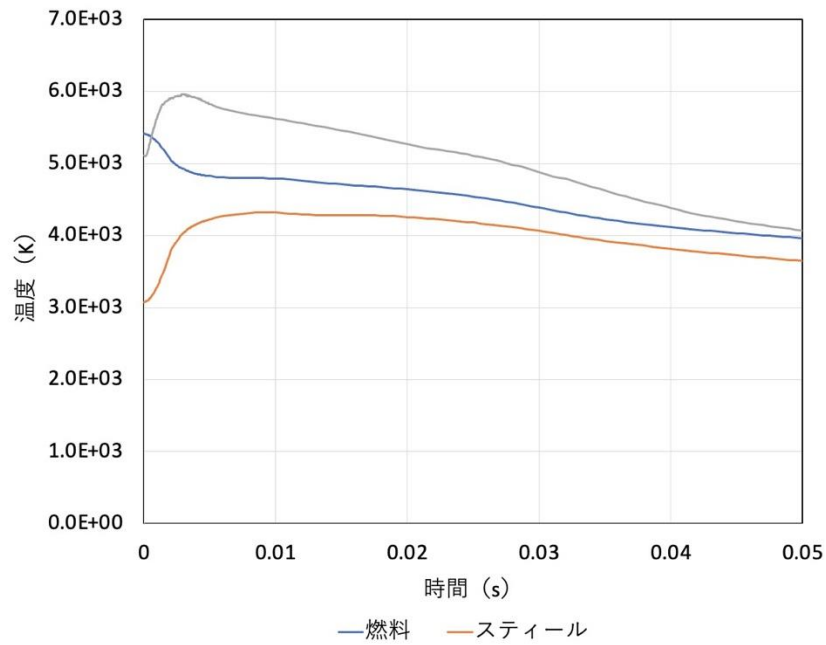
機械的エネルギー (MJ)	4.1	7	10
カバーガスピーク圧力(MPa)	5.5	25.3	68.0

4. ⑤遮へいプラグの間隙を通したナトリウム漏洩

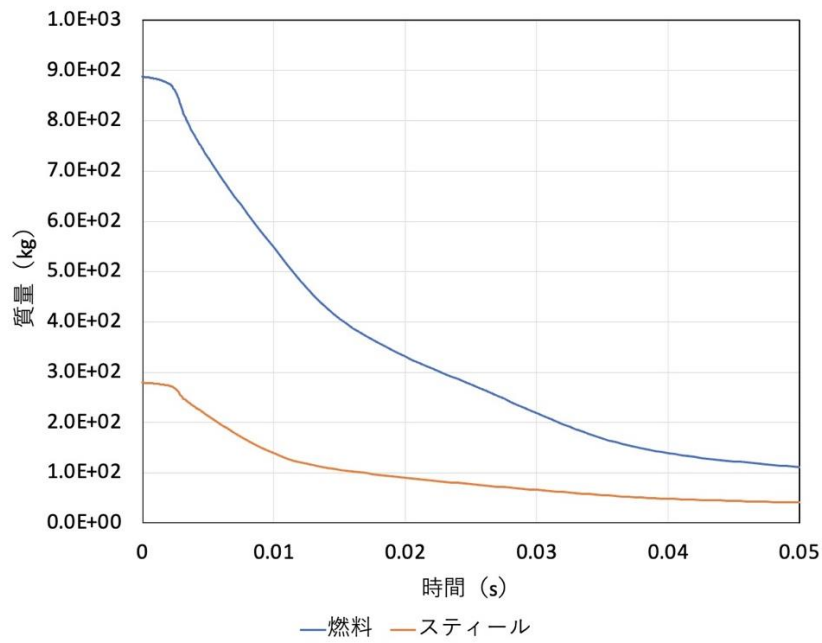
図11に示したカバーガス圧力の最初の圧力ピークの時間変化を PLUG コードに入力して遮へいプラグ、固定ボルト、及びプラグ間隙に流入するナトリウム量の解析を実施した。その結果、いずれのケースでもプラグを固定するボルトのひずみは最大で約 1.3% (UIS 固定ボルト) で破断伸びである 15%より十分小さく、ボルトの健全性は維持され、またプラグ間隙へのナトリウムの流入量は最大でも約 50kg 弱 (大回転プラグ間隙を満たすナトリウムは約 500kg 以上) でナトリウムの格納容器床土への噴出も生じない結果を得た。



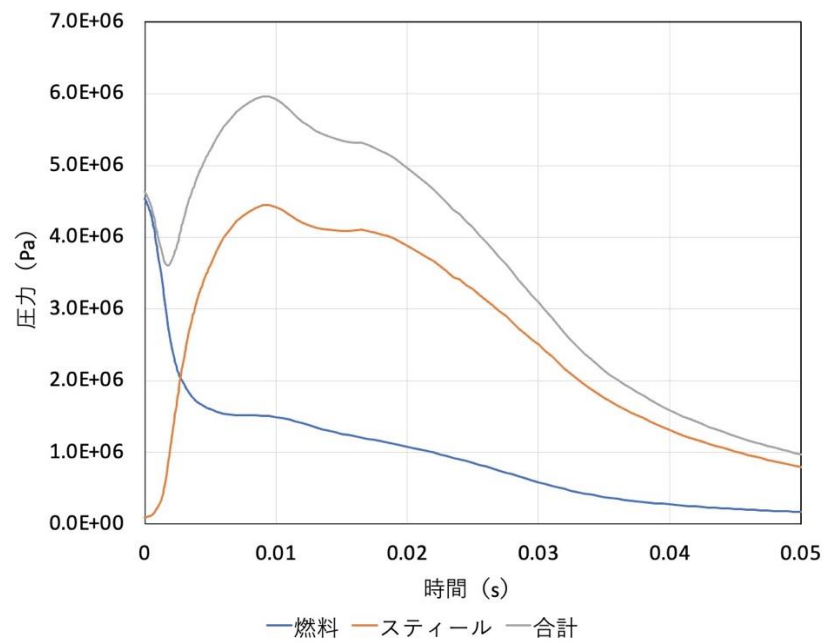
第1図 平均蒸気圧力



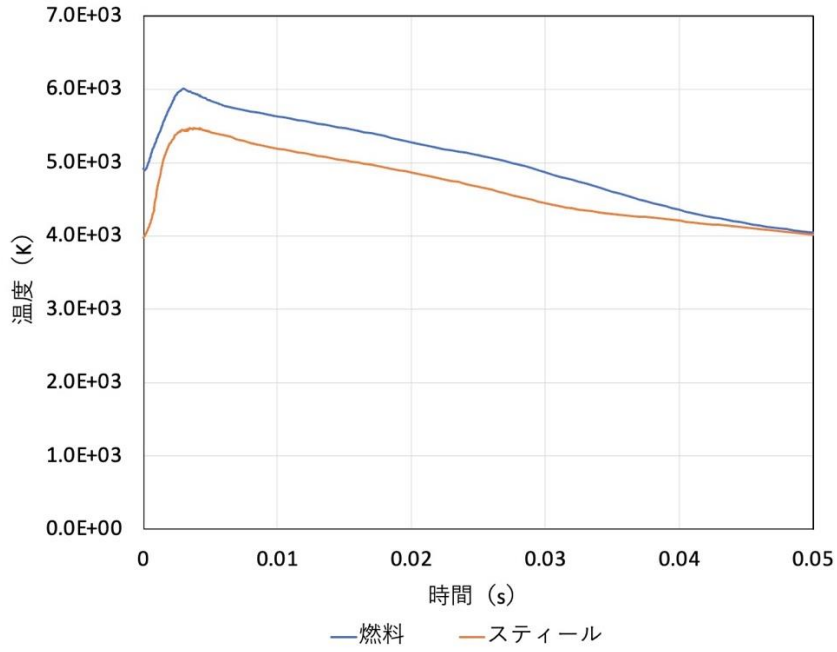
第2図 平均温度



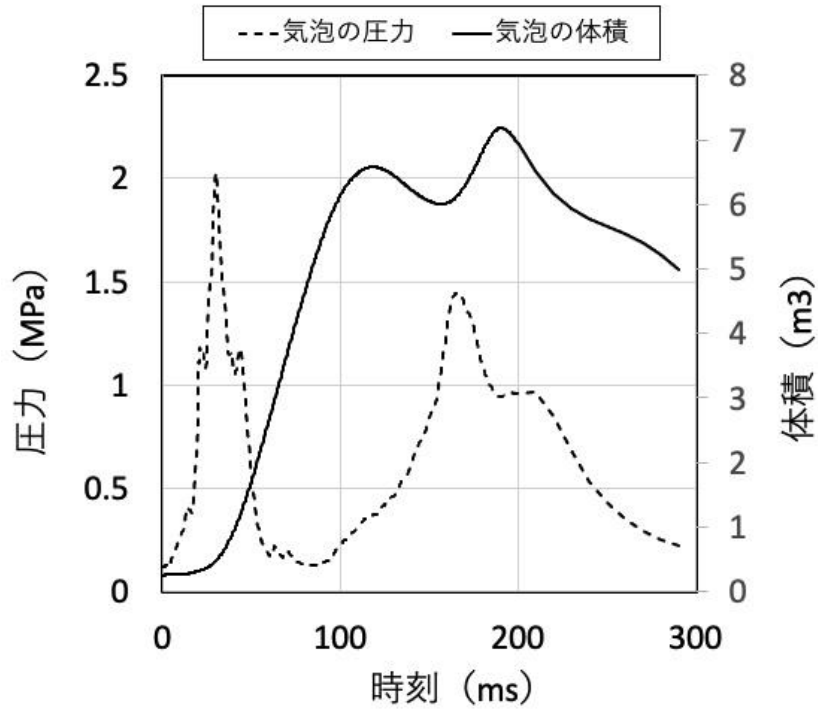
第3図 炉心内質量



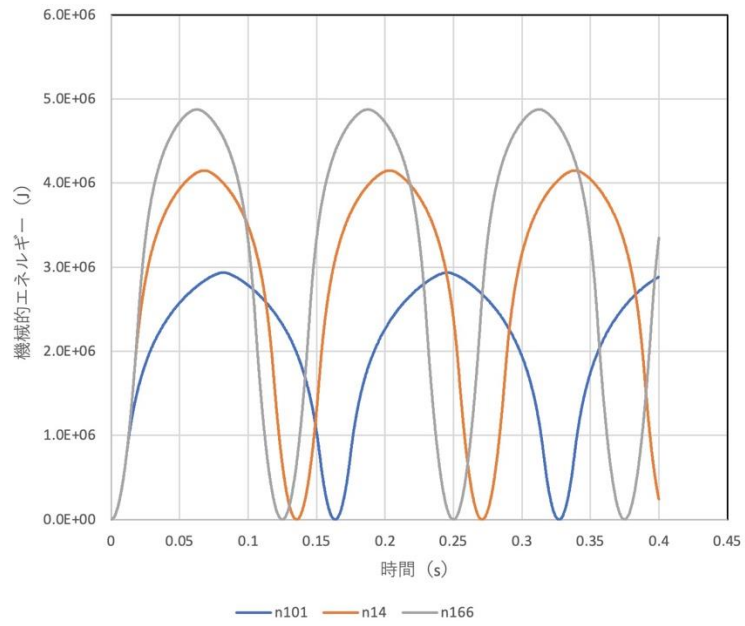
第4図 平均温度に対する飽和圧力



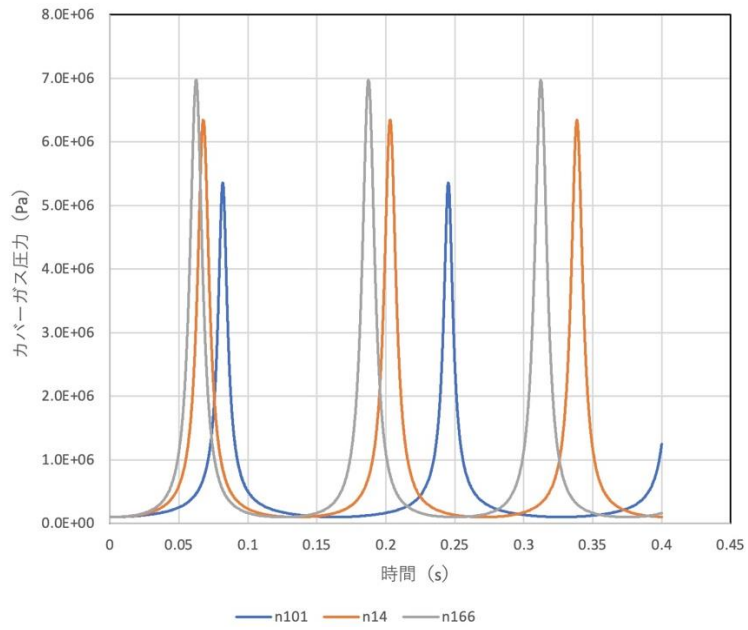
第5図 平均蒸気圧力に対する飽和温度



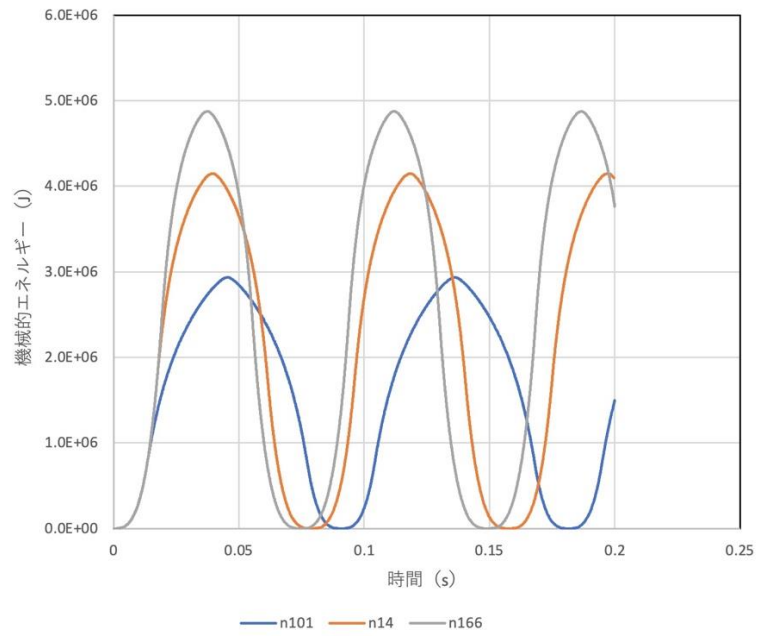
第6図 SIMMER 解析における CDA 気泡の平均圧力と体積



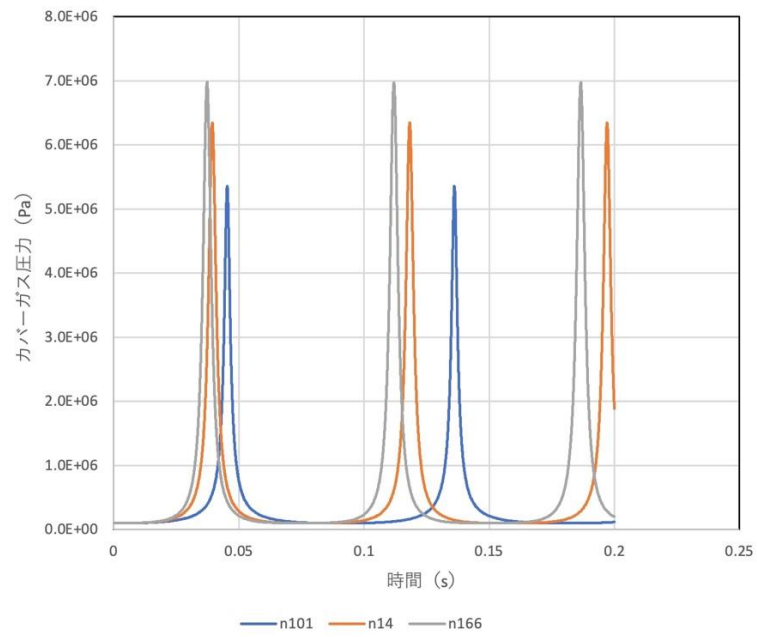
第 7 図 Slug モデルによる機械的エネルギー過渡挙動



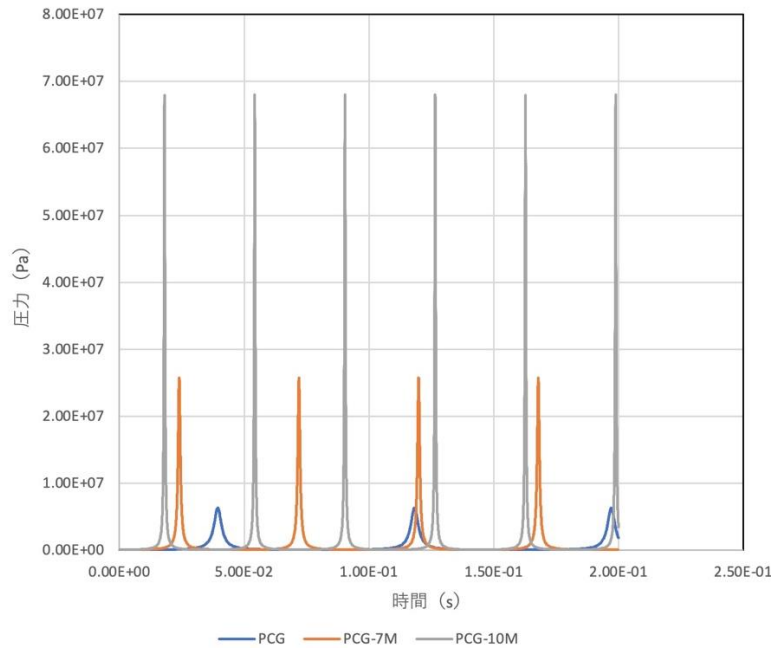
第 8 図 Slug モデルによるカバーガス圧力過渡挙動



第 9 図 Rayleigh モデルによる機械的エネルギー過渡挙動



第 10 図 Rayleigh モデルによるカバーガス圧力過渡挙動



第 1 1 図 機械的エネルギーに対するカバーガスピーク圧力の変化

添付1a UCSを通した炉心物質の流出挙動(PGAV)

流出量計算											
即発臨界超過時の状態 (遷移過程解析t=24.7909、PDE解析t=0)					LM二相圧損計算						
溶融燃料 α	ALPLF	5.170E-01	燃料体積率	5.214E-01	平均液体密度	6.91E+03	流速	14.51 ←これを調節して圧損とPGSATが一致するようにする			
燃料粒子 α	ALPPF	2.911E-03	//密度	6.809E+03			流路等価直径	2.4800E-03			
燃料チャック α	ALPCF	1.505E-03					液単相Re	1.6506E+05			
溶融スチール α	ALPLS	1.441E-01	スチール体積率	1.552E-01			液単相f	3.9194E-03			
スチール粒子 α	ALPPS	1.112E-02	//密度	7.251E+03			液単相圧損	3.2862E+06			
ボイド率	ALPG	2.855E-01	蒸気密度	2.272E+01	α : 体積率		気体単相Re	7.6872E+03			
							気体単相f	8.4369E-03			
							気体単相圧損	9.2952E+03			
即発臨界超過時の状態 (遷移過程解析t=24.7909、PDE解析t=0)							Xtt	1.8802E+01			
溶融燃料温度	TMPF3	5.415E+03	燃料粘性	2.319E-03	粘性率	熱伝導率	比内部エネルギー	比熱	プラントル数	ΦL^2	2.1197 (Chisholmによる相関)
溶融スチール温度	TMPS3	3.072E+03	スチール粘性	6.921E-04						二相圧損	6.9657E+06
ガス温度	TMPG	5.269E+03	液体平均値	1.507E-03						UCS流路長さ	0.92726
										圧損	6.4590E+06
即発臨界超過時の状態 (遷移過程解析t=24.7909、PDE解析t=0)											
燃料質量	MASF	8.864E+02								流路面積	0.001754411
スチール質量	MASS	2.810E+02								集合対数	85 (CRGT、照射集合体などを燃料集合体に置き換え)
ガス質量	MASG	1.620E+00	気体混合粘性率	1.064E-04							
燃料蒸気//	MASF5	1.007E+00								CDA気泡への流出時間	4.00E-02
スチール蒸気//	MASS5	1.939E-01								燃料流出量	3.073E+02
ナトリウム蒸気//	MASN2	1.416E-01								燃料体積	4.513E-02
FPガス//	MASFPG	2.771E-01								スチール流出量	9.741E+01
										合計体積	5.857E-02
										ゴールシーク用セル	0.0000E+00
炉心蒸気圧総和PGAV		6.609E+06									
PGAV-上部ブレンラム		6.459E+06									
炉心体積	VOLUME	2.497E-01									

炉心物質からの熱損失計算											
上部ブレンラム圧力		1.500E+05								UCS通過時間	0.063898238 ←UCS出口に融体が達した時のUCS軸方向温度分布を考慮し、伝熱時間はこの50%を考慮する。
//ナトリウム飽和温度		1.199E+03								伝熱時間= $\pi/2$ + 流出時間	7.19E-02
集合体ラップ管断面積		5.100E-04								燃料が単相で上記流速で流れる状況の熱伝達係数に体積率を乗ずることで熱伝達係数を評価。	
集合体被覆管断面積		8.092E-04								Re	1.057E+05
集合体数		8.500E+01								Dittus-Boelter式	1.369E+02
UCS構造材体積		1.040E-01								熱伝達係数	1.739E+05
350°C		6.232E+02								実効//	9.066E+04
//比内部エネルギー		1.707E+05								除熱量	6.691E+07 ←構造材表面温度に燃料と構造材表面の接触境界面温度を適用
UCS構造材質量		8.093E+02								温度低下	6.549E+02
UCS構造材初期温度		5.500E+02								CDA気泡流入熱エネルギー	5.965E+08 ←ナトリウムの沸点以上の融体熱エネルギー
UCS構造材昇温後温度		7.145E+02 ←これを調節して総除熱量とUCS内部エネルギー変化が一致するようにする。								スチールが単相で上記流速で流れる状況の熱伝達係数に体積率を乗ずることで熱伝達係数を評価。	
UCS内部エネルギー変化		7.905E+07								Re	3.770E+05
										Seban-Shimazaki式	3.736E+01
ゴールシーク用セル		2.635E-04								熱伝達係数	3.142E+05
										実効//	4.876E+04
										除熱量	1.214E+07 ←構造材表面は構造材の融点と想定
										温度低下	1.678E+02
										CDA気泡流入熱エネルギー	1.491E+08 ←ナトリウムの沸点以上の融体熱エネルギー
										総除熱量	7.905E+07
										CDA気泡流入熱エネルギー-計	7.456E+08
										FCI効率	0.003
										機械的エネルギー	2.237E+06

添付1b UCSを通した炉心物質の流出挙動(PGAV、液単相)

流出量計算										
即発臨界超過時の状態 (遷移過程解析t=24.7909、PDE解析t=0)										
溶融燃料 α	ALPLF	5.170E-01	燃料体積率	5.214E-01	平均液体密度	6.91E+03	流速	21.35 ←これを調節して圧損とPGSATが一致するようにする		
燃料粒子 α	ALPPF	2.911E-03	//密度	6.809E+03			流路等価直径	2.4800E-03		
燃料チャック α	ALPCF	1.505E-03					液単相Re	2.4285E+05		
溶融スチール α	ALPLS	1.441E-01	スチール体積率	1.552E-01			液単相f	3.5587E-03		
スチール粒子 α	ALPPS	1.112E-02	//密度	7.251E+03			液単相圧損	6.4590E+06		
ボイド率	ALPG	2.855E-01	蒸気密度	2.272E+01	α : 体積率		気体単相Re	1.1310E+04		
即発臨界超過時の状態 (遷移過程解析t=24.7909、PDE解析t=0)										
			粘性率		熱伝導率	比内部エネルギー	比熱	プラントル数	Xtt	1.8802E+01
溶融燃料温度	TMPF3	5.415E+03	燃料粘性	2.319E-03	3.150E+00	2.545E+06	3.325E+02	2.448E-01	ΦL^2	2.1197 (Chisholmによる相関)
溶融スチール温度	TMPS3	3.072E+03	スチール粘性	6.921E-04	2.086E+01	2.217E+06	7.427E+02	2.465E-02	二相圧損	1.3691E+07
ガス温度	TMPG	5.269E+03	液体平均値	1.507E-03	3.912E+00	4.266E+02	1.643E-01		UCS流路長さ	0.92726
即発臨界超過時の状態 (遷移過程解析t=24.7909、PDE解析t=0)										
燃料質量	MASF	8.864E+02							流路面積	0.001754411
スチール質量	MASS	2.810E+02							集合対数	85 (CRGT、照射集合体などを燃料集合体に置き換え)
ガス質量	MASG	1.620E+00	気体混合粘性率	1.064E-04					CDA気泡への流出時間	4.00E-02
燃料蒸気//	MASF5	1.007E+00							燃料流出量	4.521E+02
スチール蒸気//	MASS5	1.939E-01							燃料体積	6.641E-02
ナトリウム蒸気//	MASN2	1.416E-01							スチール流出量	1.433E+02
FPガス//	MASFPG	2.771E-01							合計体積	8.617E-02
炉心蒸気圧総和PGAV										
	PGAV-上部ブレンラム	6.609E+06							ゴールシーク用セル	0.0000E+00
		6.459E+06								
炉心体積	VOLUME	2.497E-01								

炉心物質からの熱損失計算										
上部ブレンラム圧力		1.500E+05							UCS通過時間	0.043429785 ←UCS出口に融体が達した時のUCS軸方向温度分布を考慮し、伝熱時間はこの50%を考慮する。
//ナトリウム飽和温度		1.199E+03							伝熱時間= $\pi/2$ + 流出時間	6.17E-02
燃料が単相で上記流速で流れる状況の熱伝達係数に体積率を乗ずることで熱伝達係数を評価。										
集合体ラップ管断面積		5.100E-04							Re	1.555E+05
集合体被覆管断面積		8.092E-04							Dittus-Boelter式	1.864E+02
集合体数		8.500E+01							熱伝達係数	2.368E+05
UCS構造材体積		1.040E-01							実効//	1.235E+05
350°C		6.232E+02							除熱量	7.798E+07 ←構造材表面温度に燃料と構造材表面の接触境界面温度を適用
//比内部エネルギー		1.707E+05							温度低下	5.188E+02
UCS構造材質量		8.093E+02							CDA気泡流入熱エネルギー	9.093E+08 ←ナトリウムの沸点以上の融体熱エネルギー
UCS構造材初期温度		5.500E+02								
UCS構造材昇温後温度		7.405E+02 ←これを調節して総除熱量とUCS内部エネルギー変化が一致するようにする。							スチールが単相で上記流速で流れる状況の熱伝達係数に体積率を乗ずることで熱伝達係数を評価。	
UCS内部エネルギー変化		9.216E+07							Re	5.547E+05
ゴールシーク用セル										
		0.000E+00							Seban-Shimazaki式	5.089E+01
									熱伝達係数	4.279E+05
									実効//	6.641E+04
									除熱量	1.418E+07 ←構造材表面は構造材の融点と想定
									温度低下	1.332E+02
									CDA気泡流入熱エネルギー	2.232E+08 ←ナトリウムの沸点以上の融体熱エネルギー
総除熱量										
									9.216E+07	
									CDA気泡流入熱エネルギー-計	1.133E+09
									FCI効率	0.003
									機械的エネルギー	3.398E+06

添付2 カバーガス圧縮挙動の簡易モデル

【圧力源を1次元スラグでモデル化：Slug モデル】

上部プレナム内のナトリウムスラグを1次元のスラグでモデル化する。断面積を A 、質量を M 、カバーガスと圧力源の初期高さをそれぞれ l_{c0} と l_{b0} 、初期圧力をそれぞれ P_{c0} と P_{b0} とする。 $x = l_b$ を圧力源とナトリウムスラグの界面位置とすると、ナトリウムスラグの運動方程式は以下となる。

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = A(P_b - P_c) \quad (1)$$

カバーガスはポリトロプ変化 $PV^n = const.$ に従うとする。即ち、

$$P_c = \frac{P_{c0} l_{c0}^n}{l_c^n} = \frac{P_{c0} l_{c0}^n}{(l_{c0} - (x - l_{b0}))^n} \quad (2)$$

従って(1)式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{A}{M} \left(\frac{P_{b0} l_{b0}^n}{x^n} - \frac{P_{c0} l_{c0}^n}{(l_{c0} - (x - l_{b0}))^n} \right) \quad (3)$$

となる。初期値は、

$$x|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (4)$$

である。

この時、ナトリウムスラグの運動エネルギーは

$$KE = \frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (5)$$

カバーガスの圧縮エネルギーは

$$\begin{aligned} - \int_{V_{c0}}^{V_c} P_c dV_{c0} &= - \int_{V_{c0}}^{V_c} \frac{P_{c0} V_{c0}^n}{V_c^n} dV_c \\ &= -P_{c0} V_{c0}^n \left[\frac{V_c^{1-n}}{1-n} \right]_{V_{c0}}^{V_c} = \frac{P_{c0} V_{c0}^n}{n-1} (V_c^{1-n} - V_{c0}^{1-n}) \\ &= \frac{AP_{c0} l_{c0}^n}{n-1} (l_c^{1-n} - l_{c0}^{1-n}) \\ &= \frac{AP_{c0} l_{c0}^n}{n-1} \left((l_{c0} - (x - l_{b0}))^{1-n} - l_{c0}^{1-n} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

である。

【圧力源を半球でモデル化：Rayleigh モデル】

上部プレナム内のナトリウムスラグは1次元のスラグでモデル化する。断面積を A 、質量を M 、カバーガスの初期高さをそれぞれ l_{c0} 、初期圧力をそれぞれ P_{c0} とする。一方、圧力源は半球として、その初期半径を r_{b0} （数値解析上、微少な初期値を与える）とする。ここでは圧力源の膨張と収縮を気泡の運動方程式である、Rayleigh-Plesset 方程式で解析する。ただし、通常の Rayleigh-Plesset 方程式は無限遠までの慣性質量を用いているが、ここでは上部プレナム内のナトリウムスラグの有限の質量を慣性質量とするため、気泡界面からナトリウムスラグの質量 M を含む半球状の領域の半径 r_c で極座標系の Navier-Stokes 方程式を積分して得られる Rayleigh-Plesset 方程式、即ち

$$\frac{d^2 r_b}{dt^2} = \frac{r_c}{r_b(r_c - r_b)} \left(\frac{P_b - P_c}{\rho} - \frac{r_b^4 - 4r_c^3 r_b + 3r_c^4}{2r_c^4} \left(\frac{dr_b}{dt} \right)^2 \right) \quad (7)$$

を解く。なお、 r_c はナトリウムスラグの質量 M 、気泡の半径 r_b と次式の関係にある。

$$r_c = \left(r_b + \frac{3M}{2\pi\rho} \right) \quad (8)$$

なお、(7)式は $r_c = \infty$ とすると通常の Rayleigh-Plesset 方程式になる。

カバーガス体積はポリトロフ変化 $PV^n = const.$ に従うとする。即ち、

$$P_c = \frac{P_{c0}(Al_{c0})^n}{\left(Al_{c0} - \frac{2}{3}\pi(r_b^3 - r_{b0}^3) \right)^n} \quad (9)$$

となる。初期値は、

$$r_b|_{t=0} = r_{b0}, \quad \left. \frac{dr_b}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (10)$$

である。

このときのナトリウムの運動エネルギーは、半球内の径方向速度

$$v_r = \frac{v_b r_b^2}{r^2} \quad (11)$$

を用いて、 $r = r_b$ から $r = r_c$ まで積分することによって次式で計算される。

$$\int_{r_b}^{r_c} \frac{1}{2} \rho 2\pi r^2 v_r dr = \pi \rho \int_{r_b}^{r_c} \frac{v_r^2 r_b^4}{r^2} dr = \pi \rho v_r^2 r_b^4 \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c} \right) \quad (12)$$

なお、ナトリウムスラグの上昇速度は次式で概算できる。

$$v_{lc} = -\frac{1}{A} \frac{dV_c}{dt} = -\frac{1}{A} \frac{d}{dt} \left(Al_{c0} - \frac{2}{3}\pi(r_b^3 - r_{b0}^3) \right) = \frac{2\pi r_b^2}{A} \frac{dr_b}{dt} \quad (13)$$

また、カバーガスの圧縮エネルギーは

$$-\int_{V_{c0}}^{V_c} P_c dV_{c0} = -\int_{V_{c0}}^{V_c} \frac{P_{c0} V_{c0}^n}{V_c^n} dV_c \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
&= -P_{c0}V_{c0}^n \left[\frac{V_c^{1-n}}{1-n} \right]_{V_{c0}}^{V_c} = \frac{P_{c0}V_{c0}^n}{n-1} (V_c^{1-n} - V_{c0}^{1-n}) \\
&= \frac{P_{c0}V_{c0}^n}{n-1} \left(\left(Al_{c0} - \frac{2}{3}\pi(r_b^3 - r_{b0}^3) \right)^{1-n} - V_{c0}^{1-n} \right)
\end{aligned}$$

である。

添付3 有限距離の Rayleigh-Plesset 方程式

気泡表面から無限遠まで積分する直前の極座標における Navier-Stokes 方程式は以下の通り。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \left(2R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} \right) - \frac{2R^4}{r^5} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \quad (1)$$

ここで、無限遠までではなく、気泡表面 $r = R$ から有限の距離 $r = R_c$ まで積分する。

$$-\frac{1}{\rho} \int_{P_b}^{P_c} dP = \int_R^{R_c} \left[\frac{1}{r^2} \left(2R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} \right) - \frac{2R^4}{r^5} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] dr \quad (2)$$

を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{P_b - P_c}{\rho} &= \left[-\frac{1}{r} \left(2R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} \right) + \frac{R^4}{2r^4} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right]_R^{R_c} \\ &= -\frac{1}{R_c} \left(2R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} \right) + \frac{R^4}{2R_c^4} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \\ &\quad - \left[-\frac{1}{R} \left(2R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} \right) + \frac{R^4}{2R^4} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{2R}{R_c} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{R^2}{R_c} \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{R^4}{2R_c^4} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \\ &\quad - \left[-2 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] \\ &= \left(-\frac{2R}{R_c} + \frac{3}{2} + \frac{R^4}{2R_c^4} \right) \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \left(R - \frac{R^2}{R_c} \right) \frac{d^2 R}{dt^2} \\ &= \frac{R^4 - 4R_c^3 R + 3R_c^4}{2R_c^4} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{R(R_c - R)}{R_c} \frac{d^2 R}{dt^2} \end{aligned} \quad (3)$$

従って、運動方程式は、

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{R_c}{R(R_c - R)} \left[\frac{P_b - P_c}{\rho} - \frac{R^4 - 4R_c^3 R + 3R_c^4}{2R_c^4} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] \quad (4)$$

となる。(7)式は $R_c = \infty$ とすると通常の Rayleigh-Plesset 方程式になる。

添付4 Slug モデルソースコード

```

module common_data
  real*8 AREA, AM, PC0, ALC0, AN, AKE, &
    WCG, TKE, PCG, ALC, VSL, PBU, WPB, VBF, PVBF, PBINI
  real*8 VBU_P, PBU_P
  real*8,parameter :: pi=3.141592653
  integer,parameter :: MD = 2
end module common_data

!
Program RK
use common_data
!
integer ICYC
real*8 F, t, dt, tend
real*8 y(MD), y1(MD), y2(MD), y3(MD)
real*8 k1(MD), k2(MD), k3(MD), k4(MD)
!
namelist /input/ AREA, AM, PC0, ALC0, AN, VBF, PVBF, PBINI
namelist /control/ dt, tend
!
t = 0
ICYC = 0
!
read(5,nml=input)
read(5,nml=control)
!
open(unit=6,status='UNKNOWN',form='formatted',FILE='LIST06')
write(6,nml=input)
write(6,nml=control)
!
open(unit=7,status='UNKNOWN',form='unformatted',FILE='SIMBF')
call INIBF
!
! initialization
!
y(1) = 0.0d0
y(2) = 0.0d0
!
WPB = 0.0d0
VBU_P = 0.0d0
PBU_P = PBINI
!
! Solve ordinary differential equation by 4-th order Runge-Kutta method
!
do while (t.lt.tend)
!
  do n=1,MD
    k1(n) = F(n,y,t)
    y1(n) = y(n)+dt*k1(n)/2.0d0
  enddo
!
  do n=1,MD
    k2(n) = F(n,y1,t+dt/2.0d0)
    y2(n) = y(n)+dt*k2(n)/2.0d0
  enddo
!
  do n=1,MD
    k3(n) = F(n,y2,t+dt/2.0d0)
    y3(n) = y(n)+dt*k3(n)
  enddo
!
  do n=1,MD
    k4(n) = F(n,y3,t+dt)
  enddo
!
  do n=1,MD
    y(n) = y(n)+dt/6.0d0*(k1(n)+2.0d0*k2(n)+2.0d0*k3(n)+k4(n))
  enddo
!
  VSL = y(2)
  AKE = 0.5d0*AM*VSL**2
  ALC = ALC0 - y(1)
  WCG = -AREA*PC0*ALC0**AN/(1.0d0-AN)* &
    (ALC**(1.0d0-AN)-ALC0**(1.0d0-AN))
  TKE = AKE+WCG
  PCG = PC0*(ALC0/(ALC0 - y(1)))**AN
!
  VBU = max(AREA*y(1), 1.0d-10)
  PBU = min(PBINI,PVBF*(VBF/VBU)**AN)
  WPB = WPB + (PBU + PBU_P)*(VBU - VBU_P)/2.0d0
  PBU_P = PBU
  VBU_P = VBU
!
  t = t + dt
  ICYC = ICYC + 1
  call WBF(t, ICYC, y)
  write(6,1000) t, y(1), y(2), AKE, WCG, TKE
!
enddo
!
1000 format(1h ,1P,10(E12.5,' '))

```

```

!
stop
end
!
!
!
real*8 function F(n,y,t)
use common_data
!
integer n, ICYC
real*8 y(MD), t
!
if (n.eq.1 ) then
F = y(2)
elseif (n.eq.2) then
VBU = max(AREA*y(1), 1.0d-10)
PBU = min(PBINI,PVBF*(VBF/VBU)**AN)
PCG = PC0*(ALC0/(ALC0 - y(1)))**AN
F = AREA/AM*(PBU - PCG)
endif
!
end function
!
!
!
!
subroutine INIBF
integer IB, JB, I1, I2, J1, J2, NV, MV, IV
real*4 DR, DZ
character*72 CASEID
character*64 B64
character*10 SNS(15)
data SNS /&
'LB      ', 'VELOCITY', 'KE      ', '&
'WCG     ', 'TKE      ', 'PCG     ', '&
'LC      ', 'VSL      ', 'PBU     ', '&
'WPB     ', 'V1       ', 'V2     ', '&
'V3      ', 'V4       ', 'V5     ', /
!
IB=1; JB=1; I1=1; I2=1; J1=1; J2=1
NV=0; MV=15; IV=0
DR=1.0; DZ=1.0
!
write(7) CASEID
write(7) IB, JB, DR, DZ, I1, I2, J1, J2, 0, 1, 1, 1
write(7) NV, MV, IV
write(7) ( (SNS(N)//B64),N=1,MV )
!
end subroutine
!
!
!
subroutine WBF(t, ICYC, y)
use common_data
integer ICYC
real*8 t, y(MD)
!
write(7) real(t), icyc, real(y(1)), real(y(2)), &
real(AKE), real(WCG), real(TKE), real(PCG), &
real(ALC), real(VSL), real(PBU), real(WPB), &
real(1.0), real(1.0), real(1.0), real(1.0), &
real(1.0)
!
end subroutine

```

サンプル入力 (n=1.4)

```

&input
AREA=9.29629, AM=2.691E4, PC0=1E5, ALC0=0.78526,
VBF=7.3, PVBF=1.0E5, PBINI=2.0d6, AN=1.4,
/
&control
dt=1.0E-5, tend=0.4,
/

```

Rayleigh モデルソースコード

```

module common_data
  real*8 AREA, AM, PC0, ALC0, RB0, AN, VC0, VB0, AKE, &
    WCG, TKE, PCG, RHO, ALC, VSL, PBU, WPB, RC, &
    VBF, PVBF, PBINI
  real*8 VBU_P, PBU_P
  real*8,parameter :: pi=3.141592653
  integer,parameter :: MD = 2
end module common_data

!
! Program RK
!
! use common_data
!
integer ICYC
real*8 F, t, dt, tend
real*8 y(MD), y1(MD), y2(MD), y3(MD)
real*8 k1(MD), k2(MD), k3(MD), k4(MD)
!
namelist /input/ AREA, AM, PC0, ALC0, RB0, AN, RHO, &
  VBF, PVBF, PBINI
namelist /control/ dt, tend
!
read(5,nml=input)
read(5,nml=control)
!
open(unit=6,status='UNKNOWN',form='formatted',FILE='LIST06')
write(6,nml=input)
write(6,nml=control)
!
open(unit=7,status='UNKNOWN',form='unformatted',FILE='SIMBF')
call INIBF
!
! Initialization
!
t = 0
ICYC = 0
!
y(1) = RB0
y(2) = 0.0D0
!
VC0 = AREA*ALC0
VB0 = 2.0D0/3.0D0*pi*RB0**3
!
WPB = 0.0d0
VBU_P = VB0
PBU_P = PBINI
!
! Solve ordinary differential equation by 4-th order Runge-Kutta method
!
do while (t.lt.tend)
!
do n=1,MD
  k1(n) = F(n,y,t)
  y1(n) = y(n)+dt*k1(n)/2.0d0
enddo
!
do n=1,MD
  k2(n) = F(n,y1,t+dt/2.0d0)
  y2(n) = y(n)+dt*k2(n)/2.0d0
enddo
!
do n=1,MD
  k3(n) = F(n,y2,t+dt/2.0d0)
  y3(n) = y(n)+dt*k3(n)
enddo
!
do n=1,MD
  k4(n) = F(n,y3,t+dt)
enddo
!
do n=1,MD
  y(n) = y(n)+dt/6.0d0*(k1(n)+2.0d0*k2(n)+2.0d0*k3(n)+k4(n))
enddo
!
VSL = 2.0d0*pi*y(1)**2/AREA*y(2) ! velocity of sodium slug
RC = (y(1)**3 + 3.0d0*AM/(2.0d0*pi*RHO))**(1.0d0/3.0d0)
AKE = pi*RHO*y(2)**2*y(1)**4*(1.0d0/y(1) - 1.0d0/RC)
VBU = 2.0D0/3.0D0*pi*y(1)**3
ALC = ALC0 - (VBU - VB0)/AREA ! length of CG
WCG = -AREA*PC0*ALC0**AN/(1.0d0-AN)*(ALC**(1.0d0-AN) - &
  ALC0**(1.0d0-AN))
TKE = AKE+WCG ! Total kinetic energy
PCG = PC0*(VC0)**AN/(AREA*ALC)**AN ! pressure of CG
!
PBU = min(PBINI,PVBF*(VBF/VBU)**AN)
WPB = WPB + (PBU + PBU_P)*(VBU - VBU_P)/2.0d0
PBU_P = PBU
VBU_P = VBU
!
!
!

```

```

        t = t + dt
        ICYC = ICYC + 1
        call WBF(t, ICYC, y)
        write(6,1000) t, y(1), y(2), AKE, WCG, TKE, ALC, PCG, PBU
!
!     enddo
!
!1000 format(1h ,1P,10(E12.5,'  '))
!
!     stop
!     end
!
!
!
!     real*8 function F(n,y,t)
!     use common_data
!
!     integer n, ICYC
!     real*8 y(MD), t
!
!     if (n.eq.1) then
!         F = y(2)
!     elseif (n.eq.2) then
!         VBU = 2.0D0/3.0D0*pi*y(1)**3
!         PBU = min(PBINI,PVBF*(VBF/VBU)**AN)
!         PCG = PC0*(VC0/(VC0 - 2.0D0/3.0D0*pi*(y(1)**3-RB0**3)))**AN
!         RC = (y(1)**3 + 3.0d0*AM/(2.0d0*pi*RHO))**(1.0d0/3.0d0)
!         F = RC/y(1)/(RC-y(1))*((PBU-PCG)/RHO -&
!           (y(1)**4-4.0d0*RC**3*y(1)+3.0d0*RC**4)/(2.0d0*RC**4)*y(2)**2)
!     endif
!
!     end function
!
!
!
!
!     subroutine INIBF
!     integer IB, JB, I1, I2, J1, J2, NV, MV, IV
!     real*4 DR, DZ
!     character*72 CASEID
!     character*64 B64
!     character*10 SNS(15)
!     data SNS /&
!       'RB      ', 'DRBDT  ', 'KE      ', '&
!       'WCG     ', 'TKE     ', 'PCG     ', '&
!       'LC      ', 'PBU     ', 'VSL     ', '&
!       'WPB     ', 'V2      ', 'V3      ', '&
!       'V4      ', 'V5      ', 'V6      ', '/'
!
!     IB=1; JB=1; I1=1; I2=1; J1=1; J2=1
!     NV=0; MV=15; IV=0
!     DR=1.0; DZ=1.0
!
!     write(7) CASEID
!     write(7) IB, JB, DR, DZ, I1, I2, J1, J2, 0, 1, 1, 1
!     write(7) NV, MV, IV
!     write(7) ( (SNS(N)//B64),N=1,MV )
!
!     end subroutine
!
!
!
!
!     subroutine WBF(t, ICYC, y)
!     use common_data
!
!     integer ICYC
!     real*8 t, y(MD)
!
!     write(7) real(t), ICYC, real(y(1)), real(y(2)), &
!       real(AKE), real(WCG), real(TKE), real(PCG), &
!       real(ALC), real(PBU), real(VSL), real(WPB), &
!       real(1.0), real(1.0), real(1.0), real(1.0), &
!       real(1.0)
!
!     end subroutine

```

サンプル入力 (n=1.4)

```

&input
AREA=9.29629, AM=2.691E4, PC0=1E5, ALC0=0.78526, RHO=814.3,
RB0=1.0E-2, VBF=7.3, PVBF=1.0E5, PBINI=2.0d6, AN=1.4,
/
&control
dt=1.0E-5, tend=0.2,
/e

```